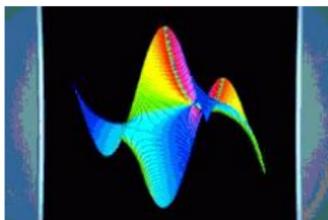


Génération automatique de procédures numériques pour les fonctions D-finies

Marc Mezzarobba

Stage à l'Inria Rocquencourt, projet Algo,
sous la direction de Bruno Salvy



Master parisien de recherche en informatique, 2006–2007

Problème

Évaluer à **grande précision** 10^{-N} des fonctions spéciales.

Exemples — $\cos(z)$, $\arctan(z)$, $\operatorname{erf}(z)$, $Ai(z)$... $(z \in \mathbb{Q}(i))$

Objectifs

- ▶ Toute la classe des **fonctions holonomes**
- ▶ Complexité **quasi-optimale** $O^{\sim}(N)$
- ▶ Automatisation complète



D.V. and G.V. Chudnovsky. Computer algebra in the service of mathematical physics and number theory. 1990.



J. van der Hoeven. Fast evaluation of holonomic functions. 1999.

Résultats

► Fonctions d'onde sphéroïdales

► Solutions de

$$(1 - z^2)y''(z) - 2(b + 1)zy'(z) + (c - 4qz^2)y(z) = 0$$

► 1000 chiffres décimaux de $y(1/3)$ en 0,54 seconde

$$(b = 1, c = 0, q = 1, y(0) = 1, y'(0) = 0)$$

► Code générique, entrée = équation ci-dessus

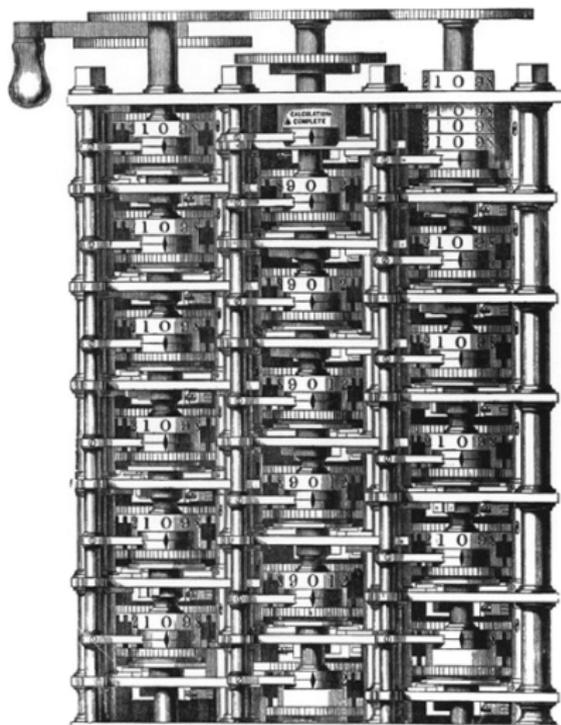
► Un million de chiffres décimaux de π

► Même noyau de code + formule *ad hoc*

$$\frac{1}{\pi} = 12 \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k (6k)! (13591409 + 545140134k)}{(3k)! (k!)^3 640320^{3k+3/2}}$$

► 30 secondes

(Pentium 4 2.8GHz, Maple 10)



B. H. Babbage, del.

Fonctions spéciales, holonomie

Prolongement analytique en
complexité quasi-optimale

Calcul de bornes et contrôle de la
précision

Définition des fonctions holonomes

Définition

Une fonction $y(z) : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ est **holonome** (D-finie) si elle est solution d'une équation différentielle linéaire (homogène) à coefficients polynomiaux :

$$a_r(z) y^{(r)}(z) + \dots + a_1(z) y'(z) + a_0(z) y(z) = 0, \quad a_j \in \mathbb{Q}(i)[z].$$

Traiter toute cette classe

Exemple

$$y(z) = \arctan(z) \quad \leftrightarrow \quad \begin{aligned} (1 + z^2) y''(z) + 2z y'(z) &= 0 \\ y(0) = 0, \quad y'(0) &= 1 \end{aligned}$$

Définition des fonctions holonomes

Définition

Une fonction $y(z) : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ est **holonome** (D-finie) si elle est solution d'une équation différentielle linéaire (homogène) à coefficients polynomiaux :

$$a_r(z) y^{(r)}(z) + \dots + a_1(z) y'(z) + a_0(z) y(z) = 0, \quad a_j \in \mathbb{Q}(i)[z].$$

Équation différentielle = structure de données
 Manipulation en Maple avec **gfun**

Exemple

$$\arctan(z) = \left\{ \begin{array}{l} (1 + z^2) y''(z) + 2z y'(z) = 0 \\ y(0) = 0, y'(0) = 1 \end{array} \right\}$$

Singularités des fonctions holonomes

Théorème de Cauchy

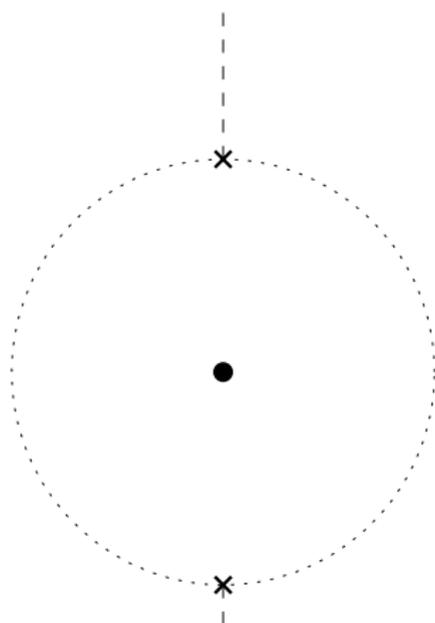
Si $a_r(z_0) \neq 0$, l'équation différentielle

$$a_r(z) y^{(r)}(z) + \cdots + a_1(z) y'(z) + a_0(z) y(z) = 0$$

admet un espace de dimension r de solutions analytiques au voisinage de z_0 .

- ▶ **Singularités** = zéros de a_r
- ▶ Solutions analytiques : $y(z) = \sum_{n=0}^{\infty} y_n (z - z_0)^n$
(solutions formelles convergentes)
- ▶ Le disque de convergence des solutions s'étend jusqu'à la plus proche singularité.

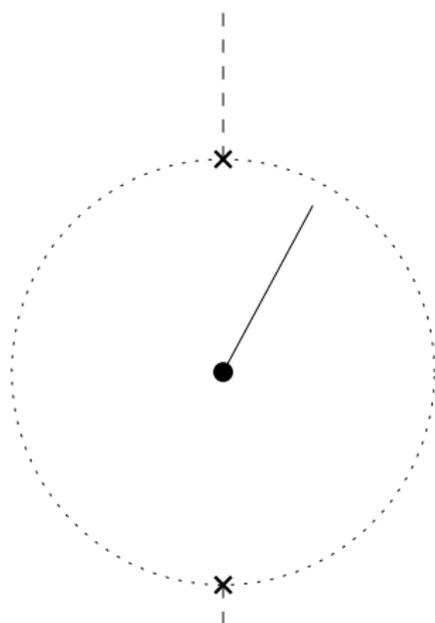
Prolongement analytique



$$(1 + z^2) y''(z) + 2z y'(z) = 0$$

- ▶ Singularités : $\pm i$
- ▶ Coupes : $\pm [i, i\infty]$

Prolongement analytique

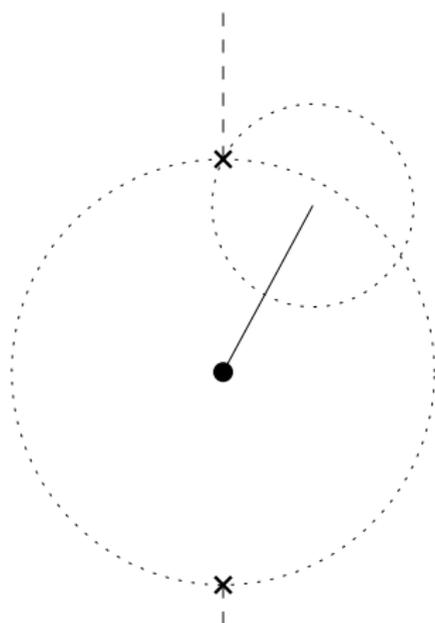


$$(1 + z^2) y''(z) + 2z y'(z) = 0$$

- ▶ Singularités : $\pm i$
- ▶ Coupes : $\pm [i, i\infty]$

- ▶ Dans le disque de convergence,
 $y(z) =$ somme de la série

Prolongement analytique

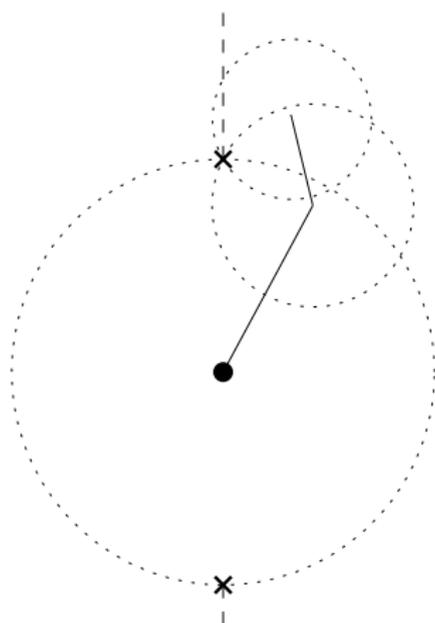


$$(1 + z^2) y''(z) + 2z y'(z) = 0$$

- ▶ Singularités : $\pm i$
- ▶ Coupes : $\pm [i, i\infty]$

- ▶ Dans le disque de convergence,
 $y(z) =$ somme de la série
- ▶ Au-delà, prolongement analytique

Prolongement analytique

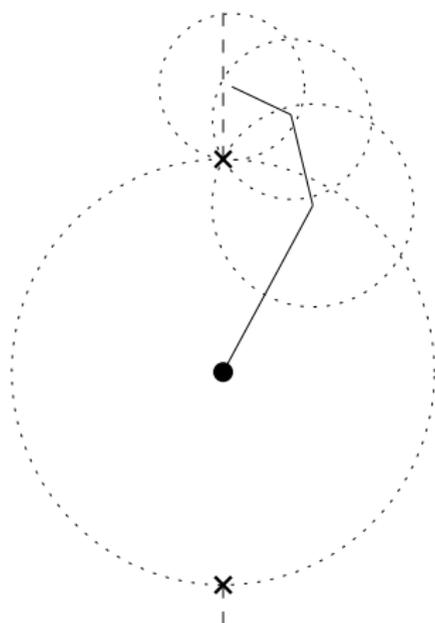


$$(1 + z^2) y''(z) + 2z y'(z) = 0$$

- ▶ Singularités : $\pm i$
- ▶ Coupes : $\pm [i, i\infty]$

- ▶ Dans le disque de convergence,
 $y(z) =$ somme de la série
- ▶ Au-delà, prolongement analytique

Prolongement analytique

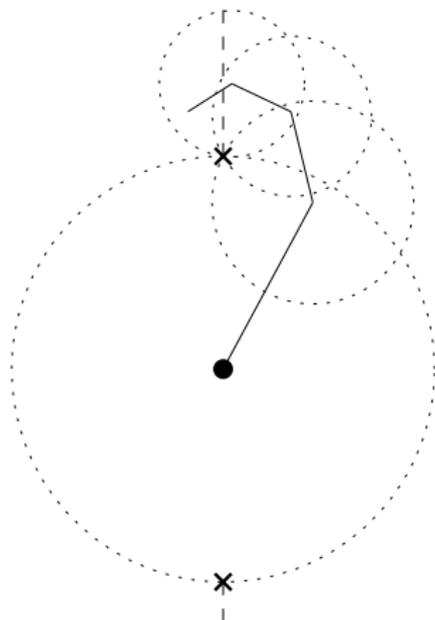


$$(1 + z^2) y''(z) + 2z y'(z) = 0$$

- ▶ Singularités : $\pm i$
- ▶ Coupes : $\pm [i, i\infty]$

- ▶ Dans le disque de convergence,
 $y(z) =$ somme de la série
- ▶ Au-delà, prolongement analytique

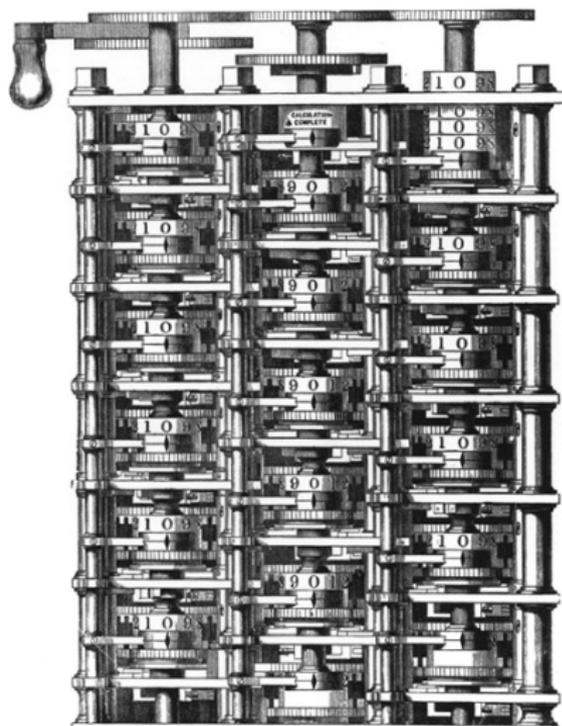
Prolongement analytique



$$(1 + z^2) y''(z) + 2z y'(z) = 0$$

- ▶ Singularités : $\pm i$
- ▶ Coupes : $\pm [i, i\infty]$

- ▶ Dans le disque de convergence,
 $y(z) =$ somme de la série
- ▶ Au-delà, prolongement analytique
- ▶ (Autre détermination)



B. H. Babbage, del.

Fonctions spéciales, holonomie

Prolongement analytique en
complexité quasi-optimale

Calcul de bornes et contrôle de la
précision

Prolongement analytique effectif

- ▶ Base de solutions en z_0

$$y_{[z_0, j]}(z) = (z - z_0)^j + \square \cdot (z - z_0)^r + \dots \quad j \in \llbracket 0, r - 1 \rrbracket$$

- ▶ Matrice de passage

$$M_{z_0 \rightarrow z_1} = \begin{bmatrix} y_{[z_0, 0]}(z_1) & \dots & y_{[z_0, r-1]}(z_1) \\ y'_{[z_0, 0]}(z_1) & \dots & y'_{[z_0, r-1]}(z_1) \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{1}{(r-1)!} y_{[z_0, 0]}^{(r-1)}(z_1) & \dots & \frac{1}{(r-1)!} y_{[z_0, r-1]}^{(r-1)}(z_1) \end{bmatrix}$$

- ▶ Composition des matrices de passage
= prolongement analytique

$$M_{z_0 \rightarrow z_1 \rightarrow \dots \rightarrow z_m} = M_{z_{m-1} \rightarrow z_m} \cdots M_{z_1 \rightarrow z_2} \cdot M_{z_0 \rightarrow z_1}$$

Évaluation dans le disque de convergence

- ▶ On a ramené le prolongement analytique à des évaluations dans le disque de convergence.

- ▶ Coefficients indéterminés :

$$a_r y^{(r)} + \dots + a_0 y = 0, \quad y(z) := \sum_n y_n z^n$$

↳ **récurrence** linéaire à coefficients polynomiaux

$$b_s(n) y_{n+s} + \dots + b_0(n) y_n = 0$$

Exemple — $\arctan z = y(z) = \sum y_n z^n$

$$(1 + z^2) y''(z) + 2z y'(z) = 0 \quad \Rightarrow \quad (n+2)y_{n+2} + ny_n = 0$$

- ▶ Sommer la série

Complexité ?

Écriture matricielle de la récurrence

- ▶ Récurrence sur les coefficients :

$$y_{n+s} + b_{n+s-1}(n)y_{n+s-1} + \cdots + b_0(n)y_n = 0$$

Écriture matricielle de la récurrence

- ▶ Récurrence sur les termes :

$$y_{n+s}z^{n+s} + zb_{n+s-1}(n)y_{n+s-1}z^{n+s-1} + \dots + z^s b_0(n)y_n z^n = 0$$

Écriture matricielle de la récurrence

- ▶ Récurrence sur les termes :

$$y_{n+s}z^{n+s} + zb_{n+s-1}(n)y_{n+s-1}z^{n+s-1} + \dots + z^s b_0(n)y_n z^n = 0$$

- ▶ Sommes partielles $S_n = \sum_{k=0}^{n-1} y_k z^k$

$$S_{n+1}(z) = S_n(z) + y_n z^n$$

Écriture matricielle de la récurrence

- ▶ Récurrence sur les termes :

$$y_{n+s}z^{n+s} + zb_{n+s-1}(n)y_{n+s-1}z^{n+s-1} + \dots + z^s b_0(n)y_n z^n = 0$$

- ▶ Sommes partielles $S_n = \sum_{k=0}^{n-1} y_k z^k$

$$S_{n+1}(z) = S_n(z) + y_n z^n$$

- ▶ Écriture matricielle ($v_n = y_n z^n$) :

$$\begin{bmatrix} v_{n+1} \\ \vdots \\ v_{n+r-1} \\ v_{n+r} \\ S_{n+1} \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} & 1 & & & 0 \\ & & \ddots & & \vdots \\ & & & \ddots & \vdots \\ & & & & 1 \\ \square & \square & \dots & \square & 0 \\ 1 & 0 & \dots & 0 & 1 \end{bmatrix}}_{A(n)} \begin{bmatrix} v_n \\ \vdots \\ v_{n+r-2} \\ v_{n+r-1} \\ S_n \end{bmatrix}.$$

- ➡ Calculer la « factorielle » $A(n-1) \cdot \dots \cdot A(1) \cdot A(0)$

Écriture matricielle de la récurrence

- ▶ Récurrence sur les termes :

$$y_{n+s}z^{n+s} + zb_{n+s-1}(n)y_{n+s-1}z^{n+s-1} + \dots + z^s b_0(n)y_n z^n = 0$$

- ▶ Sommes partielles $S_n = \sum_{k=0}^{n-1} y_k z^k$

$$S_{n+1}(z) = S_n(z) + y_n z^n$$

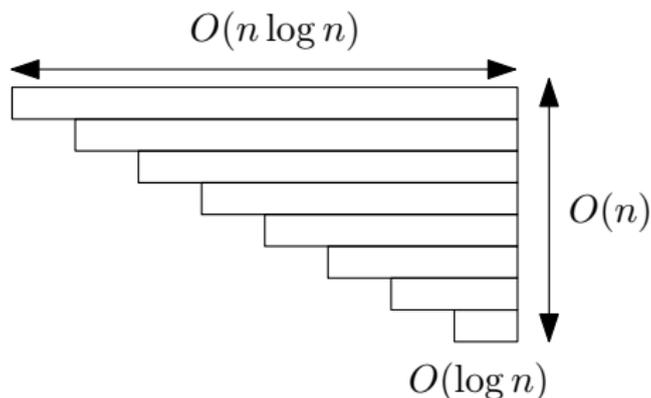
- ▶ Écriture matricielle ($v_n = y_n z^n$) :

$$\begin{bmatrix} v_{n+1} \\ \vdots \\ v_{n+r-1} \\ v_{n+r} \\ S_{n+1} \end{bmatrix} = \frac{1}{q(n)} \underbrace{\begin{bmatrix} q & & & & 0 \\ & \ddots & & & \vdots \\ & & \ddots & & \vdots \\ & & & q & \vdots \\ \square & \square & \dots & \square & 0 \\ q & 0 & \dots & 0 & q \end{bmatrix}}_{A(n)} \begin{bmatrix} v_n \\ \vdots \\ v_{n+r-2} \\ v_{n+r-1} \\ S_n \end{bmatrix}.$$

➡ Calculer la « factorielle » $A(n-1) \cdots A(1) \cdot A(0)$

Scindage binaire

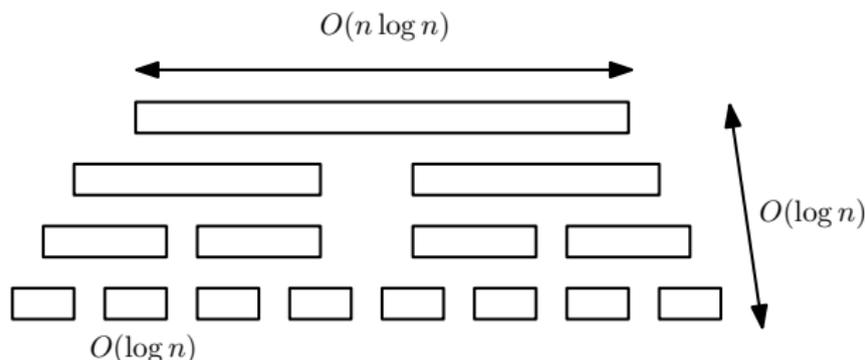
$$A(n-1) \cdots A(1) \cdot A(0)$$



Produit naïf
 $\Omega(n^2 \log n)$

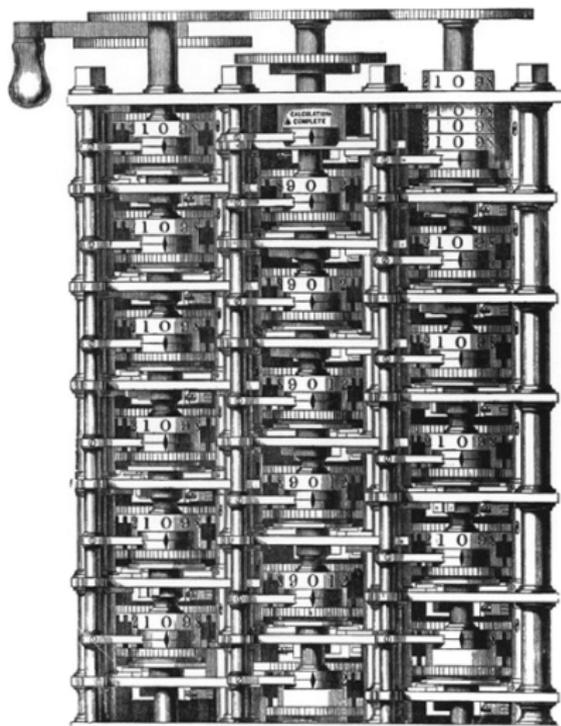
Scindage binaire

$$A(n-1) \cdots A(1) \cdot A(0) \\ = (A(n-1) \cdots A(\lfloor \frac{n}{2} \rfloor + 1)) \cdot (A(\lfloor \frac{n}{2} \rfloor) \cdots A(0))$$



$$M(n \log n) \\ + 2 M(\frac{n}{2} \log n) \\ + \dots \\ + n M(\log n) \\ = O(M(n \log n) \log n)$$

Multiplication par FFT : $M(n) = n (\log n) 2^{O(\log^* n)}$



B. H. Babbage, del.

Fonctions spéciales, holonomie

Prolongement analytique en
complexité quasi-optimale

Calcul de bornes et contrôle de la
précision

Vitesse de convergence des séries de Taylor

- ▶ But : $\left| y(z) - \sum_{k=0}^{n-1} y_k z^k \right| \leq 10^{-p}$
- ▶ Si $|y_n| \leq \alpha^n \varphi(n)$, alors $\left| \sum_{k=n}^{\infty} y_k z^k \right| \leq |\alpha z|^n \overbrace{\sum_{k=0}^{\infty} \varphi(n+k)}^{\psi(n)} |\alpha z|^k$
- ▶ Rayon de convergence $\rho = 1 / \limsup_{n \rightarrow \infty} |y_n|^{1/n}$
 ↳ meilleur $\alpha = 1/\rho$
- ▶ Nombre de termes : $n \simeq \frac{p}{\log(\rho/|z|)}$

Calculer une **borne** du bon ordre ?

Bornes sur les restes

Algorithme de calcul

Entrée

$$\{a_r y^{(r)} + \dots + a_0 y = 0, y(0) = u_0, \dots\}$$

Sortie

$$|\sum_{k=n}^{\infty} y_k z^k| \leq \dots$$

Nombre de termes

Cas général
($\rho < \infty$)

$$A \left(\frac{|z|}{\rho}\right)^n \exp(K n^\beta) \quad (0 \leq \beta < 1)$$

Point singulier
régulier

$$A \left(\frac{|z|}{\rho}\right)^n n^N$$

$\rho = \infty$

$$\frac{A}{n!^{1/N}}$$

$$\left. \begin{array}{l} \\ \\ \end{array} \right\} \frac{\rho}{\log(\rho/|z|)} + o(\rho)$$

$$O\left(\frac{\rho}{\log \rho}\right)$$

Résultats

Nombre de chiffres décimaux corrects

		$\arctan \frac{1}{2}$	$\arctan \frac{3}{4}$	$\frac{\cos z}{1-z}, z = \frac{1}{3}$	$(\alpha C + \beta S)(\frac{\pi}{3}) (*)$
100	M.	104	104	103	104
	vdH01	177	194	165	167
1000	M.	1004	1005	1004	1006
	vdH01	1716	1874	1591	1595

(*) $\{(1 - z^2)y''(z) - zy'(z) + 2(1 - 2z^2)y(z) = 0, y(0) = 1, y'(0) = 0\}$
 (forme algébrique de l'équation de Mathieu) en $z = 1/2$.

		$\exp \frac{z}{1-z^2}, z = \frac{1}{3}$	$\operatorname{erf} \frac{z}{1-z}, z = \frac{1}{3}$	e^{-100}	$\operatorname{Ai}(4i + 4)$
100	M.	107	123	102	238
	vdH01	152	146	316	357
1000	M.	1015	1081	1003	1764
	vdH01	1555	1501	4232	> 4000



J. van der Hoeven. Fast evaluation of holonomic functions near and in regular singularities.

Équations majorantes

Méthode de Cauchy-Kovalevski

La série $f \in \mathbb{C}[[z]]$ est **majorée** par $g \in \mathbb{R}_+[[z]]$ (on note $f \triangleleft g$) lorsque $|f_n| \leq g_n$ pour tout n .

Proposition

Si

$$\begin{aligned} f^{(r)} &= a_{r-1} f^{(r-1)} + \dots + a_0 f \\ g^{(r)} &= b_{r-1} g^{(r-1)} + \dots + b_0 g \end{aligned} \quad \text{avec } \forall j, a_j \triangleleft b_j$$

et

$$|f(0)| \leq g(0), \quad \dots, \quad |f^{(r-1)}(0)| \leq g^{(r-1)}(0),$$

alors $f \triangleleft g$.

Séries majorantes pour les fonctions holonomes

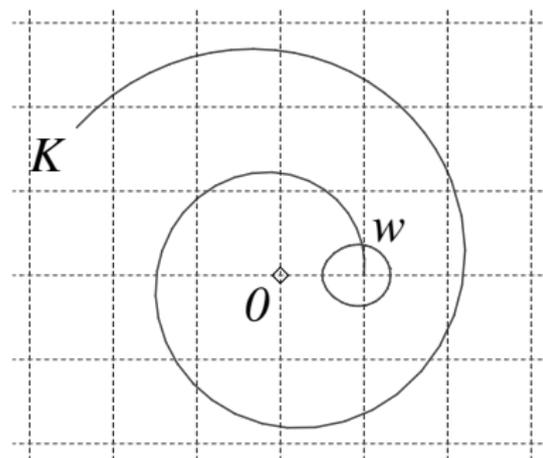
Choix de borne dirigé par le comportement asymptotique

- ▶ $y^{(r)} = -\frac{a_{r-1}}{a_r}y^{(r-1)} - \dots - \frac{a_0}{a_r}y$
- ▶ Identifier une équation majorante dont les solutions aient le **même rayon de convergence**
 - ▶ Même ordre r , solutions simples
- ▶ Majorer (\leq) finement les fractions rationnelles a_j/a_r
 - ▶ Récurrence (coef. constants) sur leurs développements

Majorants calculés

	irrégulier	régulier	$\rho = \infty$
$y(z) \leq$	$A \exp \frac{M}{(1 - \alpha z)^N}$	$\frac{A}{(1 - \alpha z)^N}$	$A e^{M \left(z + \dots + \frac{z^N}{N} \right)}$

Choix du chemin de prolongement analytique



- ▶ Une singularité, en 0
- ▶ Chemin 1 $\rightsquigarrow K \in \mathbb{C}$
- ▶ Discrétisation : w^m
- ▶ Heuristiquement optimal
- ▶ Généralise les chemins optimaux publiés [CC87]

Spirale $e^{\omega t}$ ($\omega \in \mathbb{C}$)

Ovale $|w - 1| \log|w - 1| + \operatorname{Re} \left(|w - 1| \frac{w}{w-1} \log(w) \right) = 0$



D.V. and G.V. Chudnovsky. Computer assisted number theory with applications. 1987.

Résumé

- ▶ Évaluation **efficace** de fonctions holonomes (code disponible)
- ▶ **Bornes fines** sur les coefficients et les restes de leurs développements de Taylor

Application : monodromie

Perspectives

- ▶ Points singuliers
 - ▶ Bornes, matrices de connexion, matrices de Stokes
- ▶ Code efficace en toute précision
- ▶ Bornes pour la combinatoire
- ▶ ...

Résumé

- ▶ Évaluation **efficace** de fonctions holonomes (code disponible)
- ▶ **Bornes fines** sur les coefficients et les restes de leurs développements de Taylor

Application : monodromie

Perspectives

- ▶ Points singuliers
 - ▶ Bornes, matrices de connexion, matrices de Stokes
- ▶ Code efficace en toute précision
- ▶ Bornes pour la combinatoire
- ▶ ...

Merci !