Théorèmes de convergence

Convergence uniforme

Soit (f_n) convergeant uniformément vers f.

- ► $\forall n, f_n$ bornée $\Longrightarrow f$ bornée.
- ► $\forall n, f_n$ continue en $a \Longrightarrow f$ continue en a.
- ► $\forall n, f_n(x) \to \alpha_n \Longrightarrow \begin{cases} (\alpha_n) \text{ converge} \\ \text{et } f(x) \to \lim \alpha_n. \end{cases}$
- ► $\begin{cases} \forall n, f_n\ \mathcal{CM} \\ f\ \mathcal{CM} \end{cases} \Longrightarrow \displaystyle\int_a^b f_n \to \int_a^b f.$

Soit $\sum f_n$ une série uniformément convergente.

- ► $\forall n, f_n$ continue en $a \Longrightarrow \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} f_n$ continue en a.
- ► $\forall n, f_n(x) \to \alpha_n \Longrightarrow \begin{cases} \sum \alpha_n \text{ converge} \\ \text{et } \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x) \to \sum_{n=0}^{+\infty} \alpha_n. \end{cases}$
- ► $\begin{cases} \forall n, f_n\ \mathcal{CM} \\ \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} f_n\ \mathcal{CM} \end{cases} \Longrightarrow \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \int_a^b f_n = \int_a^b \sum_{n=0}^{+\infty} f_n.$

Soit (f_n) une suite d'applications $\mathcal{C}^1 : I \to E$ qui converge simplement vers f. Si f_n' converge uniformément vers g, alors f est $\mathcal{C}^1$ et $f' = g$.

Soit $\sum f_n$ une série d'applications $\mathcal{C}^1$ de I dans E qui converge simplement. Si $\sum f_n'$ converge uniformément, alors $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} f_n$ est $\mathcal{C}^1$ et $\left(\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} f_n\right)' = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} f_n'$.

Convergence monotone

Soit $(f_n) \in L^1(I, \mathbb{R})^{\mathbb{N}}$ une suite de fonctions intégrables convergeant simplement vers f. Si

(i) (f_n) est croissante ;

(ii) f est $\mathcal{CM}$;

alors

$$\int_I f_n \to \int_I f \in \overline{\mathbb{R}}.$$

En d'autres termes,

$$f \in L^1(I, \mathbb{R}) \Longleftrightarrow \left(\int_I f_n\right) \text{ majorée} \Longleftrightarrow \left(\int_I f_n\right) \text{ convergente}$$

et le cas échéant $\displaystyle\int_I f_n \to \int_I f$.

Soit $\sum f_n$ une série simplement convergente de fonctions intégrables $I \to \mathbb{R}$. Si

(i) $\forall n, f_n \geqslant 0$;

(ii) $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} f_n$ est $\mathcal{CM}$;

alors

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \int_I f_n = \int_I \sum_{n=0}^{+\infty} f_n \in \overline{\mathbb{R}}.$$

En d'autres termes, $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} f_n$ est intégrable si et seulement si $\left(\sum \displaystyle\int_I f_n\right)$ converge, et le cas échéant $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \int_I f_n = \int_I \sum_{n=0}^{+\infty} f_n$.

Soit $\sum f_n$ une série simplement convergente de fonctions intégrables $I \to E$. Si

(i) $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} f_n$ est $\mathcal{CM}$;

(ii) $\sum \displaystyle\int_I \|f_n\|$ converge ;

alors

(i) $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} f_n \in L^1(I, E)$;

(ii) et $\displaystyle\int_I \sum_{n=0}^{+\infty} f_n = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_I f_n$.

Convergence dominée

Soit I un intervalle quelconque de $\mathbb{R}$ et soit (f_n) une suite de fonctions continues par morceaux de I dans E convergeant simplement vers f. Si

(i) f est $\mathcal{CM}$;

(ii) $\exists\varphi \in L^1(I,\mathbb{R}^+)$ / $\forall n\forall t, \|f_n(t)\| \leqslant \varphi(t)$;

alors les f_n sont intégrables (évident), f est intégrable, et

$$\int_I f_n \to \int_I f.$$

(Théorème de convergence dominée)

Continuité et dérivabilité sous le signe $\int$

Cas d'une intégrale sur un segment, sous condition de continuité

- $f \in \mathcal{C}^0\big((X\times[a,b],\|\cdot\|_\infty),E\big) \Longrightarrow \left(x \mapsto \displaystyle\int_a^b f(x,t)\,\mathrm{d}t\right) \in \mathcal{C}^0(X,E).$

  (Théorème de continuité sous le signe $\int$)

- $f \in \mathcal{C}^0(X\times I,E) \Longrightarrow \left((x,u,v) \mapsto \displaystyle\int_u^v f(x,t)\,\mathrm{d}t\right) \in \mathcal{C}^0(X\times I\times I,E).$

- $\begin{cases} f \in \mathcal{C}^0\big((X\times[a,b],\|\cdot\|_\infty),E\big) \\ \dfrac{\partial f}{\partial x} \text{ existe et est continue pour } \|\cdot\|_\infty \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} x \mapsto \displaystyle\int_a^b f(x,t)\,\mathrm{d}t \text{ est } \mathcal{C}^1 \\ \dfrac{\partial}{\partial x}\left(\displaystyle\int_a^b f(x,t)\,\mathrm{d}t\right) = \displaystyle\int_a^b \dfrac{\partial f}{\partial x}(x,t)\,\mathrm{d}t. \end{cases}$

  (Théorème de dérivation sous le signe $\int$ ou formule de LEIBNIZ*)*

- f continue $\Longrightarrow \displaystyle\int_a^b\int_c^d f = \int_c^d\int_a^b f.$

  (Théorème de FUBINI*)*

Cas d'une fonction sommable sur un intervalle quelconque, sous condition de domination

- Soit $f : X\times I \to E$ telle que $\forall x \in X, (t\mapsto f(x,t)) \in L^1(I,E)$;
  et soit $F : x \mapsto \displaystyle\int_I f(x,t)\,\mathrm{d}t$. Si

  (i) $\forall t \in I, x \mapsto f(x,t)$ est continue ;

  (ii) il existe φ intégrable telle que $\forall x\forall t, \|f(x,t)\| \leqslant \varphi(t)$;

  alors F est continue.

- Soit $f : J\times I \to E$ telle que $\forall x \in J, (t\mapsto f(x,t)) \in L^1(I,E)$;
  et soit $F : x \mapsto \displaystyle\int_I f(x,t)\,\mathrm{d}t$. Si

  (i) $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ existe et $\forall x,\ t \mapsto \dfrac{\partial f}{\partial x}(x,t)$ est continue par morceaux ;

  (ii) il existe φ intégrable telle que $\forall x\forall t, \left\|\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,t)\right\| \leqslant \varphi(t)$;

  alors F est dérivable et $F'(x) = \displaystyle\int_I \frac{\partial f}{\partial x}(x,t)\,\mathrm{d}t.$

  (*I.e.*, $\dfrac{\partial}{\partial x}\displaystyle\int_I f(x,t)\,\mathrm{d}t = \int_I \frac{\partial f}{\partial x}(x,t)\,\mathrm{d}t.$)