Bornes sur les suites et fonctions différentiellement finies et évaluation garantie

Marc Mezzarobba
travail en commun avec Bruno Salvy

Projet Algorithms, INRIA Rocquencourt

Rencontres Arithmétique de l'Informatique Mathématique
UST Lille, 3 au 5 juin 2008

Bornes

Motivation

- Permutations de Baxter (OEIS A001181)
  - $(n+2)(n+3)B_n = (7n^2+7n-2)B_{n-1} + 8(n-1)(n-2)B_{n-2}$, $B_0 = B_1 = 1$
  - $B_n \leqslant (n+8)^8 8^n$

- $t_k = \dfrac{(-1)^k (6k)!(13591409 + 545140134k)}{(3k)!(k!)^3 640320^{3k}}$
  - $\dfrac{12}{640320^{3/2}} \displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} t_k = \dfrac{1}{\pi}$ (Chudnovsky^2 1988)
  - $\left| \dfrac{640320^{3/2}}{12\pi} - \displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} t_k \right| \leqslant (0{,}1n^4 + 0{,}5n^3 + 1{,}5n^2 + 2{,}1n + 1)\alpha^n$

    $$\text{où } \alpha = \frac{1}{151931373056000} \simeq 0,66 \cdot 10^{-14}$$

Comportement asymptotique des récurrences

$$y_{n+s} + a_{s-1}(n)\, y_{n+s-1} + \cdots + a_1(n)\, y_{n+1} + a_0(n)\, y_n = 0$$

- bien définie
- réversible

- $a_k(n) \to a_k^\infty$ quand $n \to \infty$

$$y_{n+s} + a_{s-1}^\infty\, y_{n+s-1} + \cdots + a_1^\infty\, y_{n+1} + a_0^\infty\, y_n = 0$$

- polynôme caractéristique $X^s + a_{s-1}^\infty X^{s-1} + \cdots + a_0^\infty$

Théorème (Perron)

Soient $\alpha_1, \ldots, \alpha_s$ les racines du polynôme caractéristique.

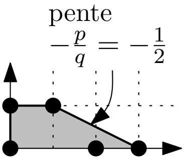
1. *La récurrence ci-dessus admet une base de solutions $y^{[k]}$ telles que* $\limsup_{n\to\infty} |y_n^{[k]}|^{1/n} = |\alpha_k|$.
2. *Si ces racines sont de modules deux à deux distincts, on a même* $y_{n+1}^{[k]} / y_n^{[k]} \to |\alpha_k|$.

Comportement asymptotique des récurrences II

Polygone de Newton, théorème de Perron-Kreuser

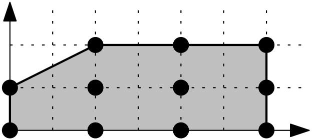
$$p_s(n)\, y_{n+s} + p_{s-1}(n)\, y_{n+s-1} + \cdots + p_1(n)\, y_{n+1} + p_0(n)\, y_n = 0$$

- $|p_k(n)/p_s(n)| \to \infty$ pour un k ou tous les $p_k(n)/p_s(n) \to 0$



$$y_{n+3}+y_{n+2}+ny_{n+1}+(n+1)y_n=0$$

$$u_n = \psi_n y_n$$
$$(n+q)^p \psi_{n+q} = \psi_n$$



$$(n+6)(n+4)u_{n+6}+2(n+4)(n+1)u_{n+4}-(n^2-n-5)u_{n+2}-(n+1)u_n=0$$

En résumé : y_n "$\simeq$" $n!^{p/q}\alpha^n$

Objectif

Bornes « fines »

$\boxed{\text{Entrée}}$ Récurrence + conditions initiales

$$\{p_s(n)\, y_{n+s} + \cdots + p_0(n)\, y_n = 0, \quad y_0 = \ldots\}$$

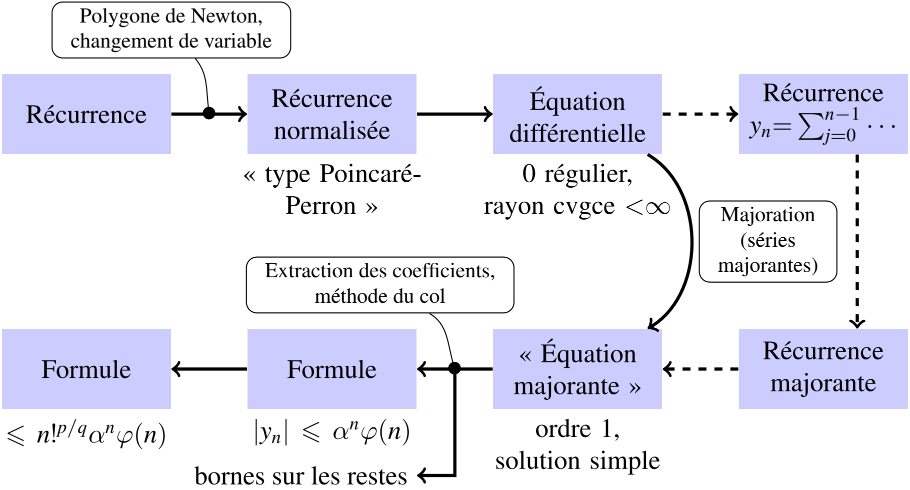
$\boxed{\text{Sortie}}$ $|y_n| \leqslant n!^{p/q}\, \alpha^n\, \varphi(n)$

avec φ sous-exponentielle, i.e. $\varphi(n) = e^{o(n)}$

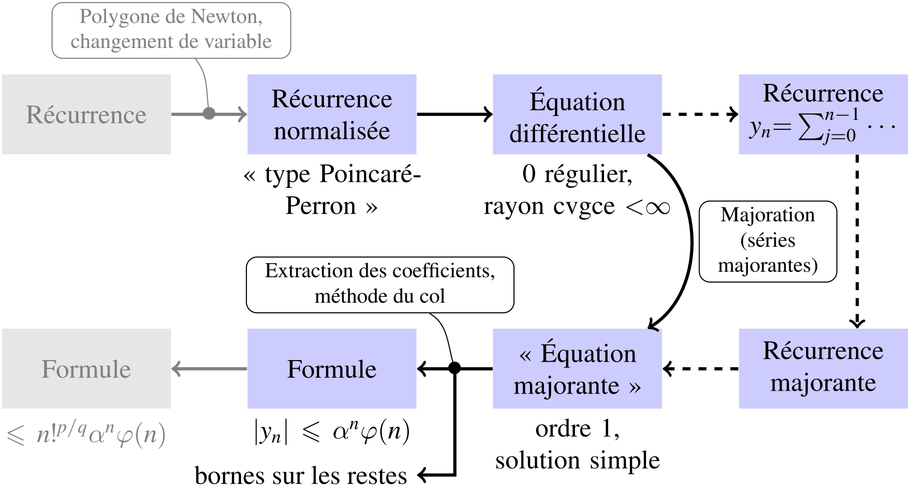
- borne correcte
- pour des conditions initiales génériques :
  p/q et α optimaux
  (voire $\varphi(n) = n^{O(1)}$)

On se laisse guider par le comportement asymptotique.

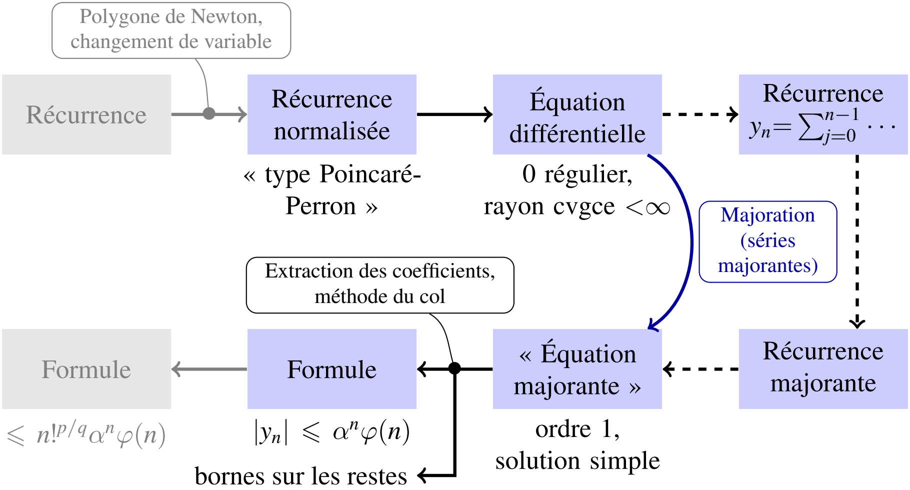
Démarche


Polygone de Newton, changement de variable
Récurrence
Récurrence normalisée
« type Poincaré-Perron »
Équation différentielle
0 régulier, rayon cvgce $<\infty$
Récurrence $y_n = \sum_{j=0}^{n-1} \dots$
Majoration (séries majorantes)
Récurrence majorante
« Équation majorante »
ordre 1, solution simple
Extraction des coefficients, méthode du col
Formule
$|y_n| \leqslant \alpha^n \varphi(n)$
Formule
$\leqslant n!^{p/q} \alpha^n \varphi(n)$
bornes sur les restes

Démarche


Polygone de Newton,
changement de variable
Récurrence
Récurrence normalisée
« type Poincaré-Perron »
Équation différentielle
0 régulier,
rayon cvgce $<\infty$
Récurrence
$y_n = \sum_{j=0}^{n-1} \ldots$
Majoration (séries majorantes)
Extraction des coefficients,
méthode du col
Formule
$\leqslant n!^{p/q} \alpha^n \varphi(n)$
Formule
$|y_n| \leqslant \alpha^n \varphi(n)$
bornes sur les restes
« Équation majorante »
ordre 1,
solution simple
Récurrence majorante

Démarche

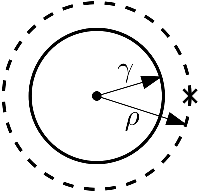


Préserver le rayon de convergence (et la nature de la singularité dominante)

Séries majorantes

Méthode de Cauchy-Kovelevskaïa : échauffement

$y'(z) = a(z)\,y(z)$ $\quad$ $a(z)$ analytique pour $|z| < \rho$



- $(n+1)y_{n+1} = \sum_{j=0}^{n} a_j y_{n-j}$
- Soit M tel que $\forall j, |a_j| \leqslant M/\gamma^j$, considérons $(n+1)g_{n+1} = \sum_{j=0}^{n} M\gamma^{-j} g_{n-j}$;
- on a alors $g'(z) = M(1 - z/\gamma)^{-1} g(z)$ donc $g(z) \propto (1 - z/\gamma)^{-\gamma M}$.
- Par récurrence $|y_0| \leqslant g_0 \implies \forall n, |y_n| \leqslant g_n$
- or $g(z)$ est analytique pour $|z| < \gamma$ $(\to \rho)$. $\square$

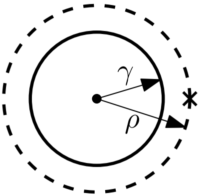
J. van der Hoeven. Fast evaluation of holonomic functions near and in regular singularities. 2001.

J. van der Hoeven. Majorants for formal power series. 2003.

Séries majorantes

Méthode de Cauchy-Kovelevskaïa : échauffement

$y'(z) = a(z)\, y(z)$ $\quad$ $a(z)$ analytique pour $|z| < \rho$



- $(n+1)y_{n+1} = \sum_{j=0}^{n} a_j y_{n-j}$
- Soit M tel que $\forall j$, $|a_j| \leqslant M/\gamma^j$, considérons $(n+1)g_{n+1} = \sum_{j=0}^{n} M\gamma^{-j} g_{n-j}$;
- on a alors $g'(z) = M(1 - z/\gamma)^{-1} g(z)$ donc $g(z) \propto (1 - z/\gamma)^{-\gamma M}$.
- Par récurrence $|y_0| \leqslant g_0 \implies \forall n, |y_n| \leqslant g_n$
- or $g(z)$ est analytique pour $|z| < \gamma$ $(\to \rho)$. $\square$

Difficultés

- On veut $\gamma = \rho$
- 0 singulier rég.

J. van der Hoeven. Fast evaluation of holonomic functions near and in regular singularities. 2001.

J. van der Hoeven. Majorants for formal power series. 2003.

Équation différentielle majorante

$$z^r y^{(r)} - c_{r-1} z^{r-1} y^{(r-1)} - \cdots - c_0 y = z^r a^{[r-1]}(z) y^{(r-1)} + z^{r-1} a^{[r-2]}(z) y^{(r-2)} + \cdots + z a^{[0]}(z) y$$

$$q(n)\, y_n = \sum_{j=0}^{n-1} \sum_{k=0}^{r-1} a^{[k]}_{n-1-j}\, j^{\underline{k}}\, y_j$$

$$\boxed{|a^{[k]}_n| \leqslant [z^n] \frac{M_k}{(1-\alpha z)^{r-k+T}}}$$

(T = irrégularité)

$$g_n = \frac{K}{n} \sum_{j=0}^{n-1} \binom{(n-1-j)+T}{T} \alpha^{n-j} g_j \qquad g'(z) = \frac{\alpha K}{(1-\alpha z)^{1+T}} g(z)$$

Équation différentielle majorante

$$z^r y^{(r)} - c_{r-1} z^{r-1} y^{(r-1)} - \cdots - c_0 y \\ = z^r a^{[r-1]}(z) y^{(r-1)} + z^{r-1} a^{[r-2]}(z) y^{(r-2)} + \cdots + z a^{[0]}(z) y$$

$$q(n)\, y_n = \sum_{j=0}^{n-1} \sum_{k=0}^{r-1} a_{n-1-j}^{[k]}\, j^{\underline{k}}\, y_j$$

$$\boxed{|a_n^{[k]}| \leqslant [z^n] \frac{M_k}{(1-\alpha z)^{r-k+T}} \quad (T = \text{irrégularité})}$$

Pour n assez grand :

$$|y_n| \leqslant \frac{1}{|q(n)|} \sum_{j=0}^{n-1} \left(\sum_{k=0}^{r-1} M_k \binom{(n-1-j)+(r-k-+T-1)}{r-k+T-1} j^{\underline{k}} \right) \alpha^{n-1-j}\, |y_j|$$

$$\leqslant \underbrace{\frac{M n^{r-1}}{|q(n)|}}_{\leqslant K/n} \sum_{j=0}^{n-1} \binom{(n-1-j)+T}{T} \alpha^{n-j}\, |y_j|$$

$$q(n) = n^r + \cdots$$

$$g_n = \frac{K}{n} \sum_{j=0}^{n-1} \binom{(n-1-j)+T}{T} \alpha^{n-j} g_j \qquad g'(z) = \frac{\alpha K}{(1-\alpha z)^{1+T}} g(z)$$

Séries majorantes « fines »

Équation majorante : $g'(z) = \dfrac{\alpha K}{(1-\alpha z)^{1+T}} g(z)$

$\boxed{T = 0}$ $\quad g(z) = \dfrac{A}{(1-\alpha z)^K}$

$$|y_n| \leqslant g_n = A \binom{n+K-1}{K-1} \alpha^n$$

$\boxed{T > 0}$ $\quad g(z) = A \exp \dfrac{K/T}{(1-\alpha z)^T}$

$$|y_n| \leqslant g_n \leqslant A \exp\left(C n^{T/(T+1)}\right) \alpha^n \qquad \text{pour } n \geqslant N$$

(méthode du col)

Bonus : bornes sur les restes, sur les dérivées

Évaluation numérique

Évaluation à grande précision de fonctions analytiques

Lien avec les bornes

- Pour évaluer $y(z_1)$ à $\varepsilon = 2^{-d}$ (donné par l'utilisateur) près
  1. Calculer $N = O(d)$ tel que $\left| y(z_1) - \sum_{n=0}^{N-1} y_n z_1^n \right| \leqslant \frac{\varepsilon}{2}$ (partie I)
  2. Calculer $\sum_{n=0}^{N-1} y_n z_1^n$
- Grande précision : $d \to \infty$
- Borne « fine » sur les y_n
  - seulement $o(d)$ chiffres superflus (sinon : $O(d)$)
    et donc « bonne constante » dans l'algorithme d'évaluation
  - série majorante indépendante de z_1

Fonctions holonomes

- Suites P-récursives ou holonomes = solutions de récurrences linéaires à coefficients poynomiaux
(cf. bornes de la partie précédente)
- Fonctions D-finies ou holonomes = solutions d'équations différentielles linéaires à coefficients polynomiaux.

Une suite est holonome si et seulement si sa série génératrice l'est.

De nombreuses fonctions élémentaires et fonctions spéciales (fonctions algébriques, cos, erf, Airy, Bessel...) sont holonomes.

Des fonctions holonomes plus générales apparaissent en combinatoire, analyse d'algorithmes, théorie des nombres.

Évaluation à grande précision des fonctions holonomes

Algorithmes, implémentations

Évaluation des fonctions holonomes :

« La stratégie précédente (sommer la série) est efficace »

Scindage binaire (*binary splitting*) : une famille d'algorithmes

- Généraux (toutes les fonctions holonomes)
- Quasi-linéaires : complexité $O(M(d \log^2 d))$ pour d chiffres
- Simples & efficaces en pratique
- Utilisés... dans des cas particuliers !

D.V. and G.V. Chudnovsky. Approximations and complex multiplication according to Ramanujan. 1988.

NumGfun

- Module Maple pour la manipulation symbolique-numérique des suites et fonctions holonomes
  - Évaluation numérique garantie
  - Bornes
  - ...
- Version 0.2 disponible (expérimental !)

  http://www.marc.mezzarobba.net/code/NumGfun-current.tgz
- Intégration à gfun / algolib en cours

  http://algo.inria.fr/libraries/

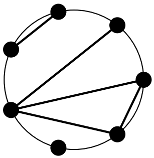
J. van der Hoeven. Fast evaluation of holonomic functions. 1999.

Bruno Salvy and Paul Zimmermann, Gfun: a Maple package for the manipulation of generating and holonomic functions in one variable, 1994.

Scindage binaire pour les suites (I)

Nombres de Motzkin

$$(n+3)\,M_{n+2} = 3n\,M_n + (2n+3)\,M_{n+1},$$
$$M_0 = 0, M_1 = M_2 = 1$$



0, 1, 1, 2, 4,
9, 21, 51,
127, 323,
835, 2188,
5798, 15511,
41835,
113634,
310572, ...

$M_{1\,000\,000}$ = 87836485521410228205552857212867952
60648460114018772686310027332206011651992742068
95017531901406553089345501470120232183076893776
76219223691237769669136651142176793088580998640
24791593930900669539159753966399354360360024084
835778 … 6784078518570776088261222699220919525
44768602806558705745804408930594940932105099980
80763012645020992166911388664219549747372475451
13677895449716717989937706488976239581832306432
74956942565741376149791829585290393680786291940

(477 112 chiffres)

Scindage binaire pour les suites (II)

Un million de décimales de π

$$\frac{1}{\pi} = 12 \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k (6k)!(13591409 + 545140134k)}{(3k)!(k!)^3 640320^{3k+3/2}} \qquad \text{(Chudnovsky}^2\text{ 1989)}$$

$\pi \simeq$ 3,14159265358979 23846264338327950 28841971693993751 05820974944592307 81640628620899862 80348253421170679 82148086513282306 64709384460955058 22317253594081284 8111745028410270

...

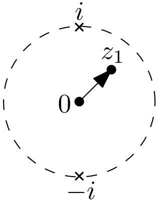
879 613 033 1164 6283 9963 46460 42209010610577945815 1

Fonctions élémentaires, fonctions spéciales

$$\boxed{(1+z^2)\ \arctan''(z) + 2z\ \arctan'(z) = 0}$$

$$\arctan \frac{3(1+i)}{5} \simeq 0{,}67078219675895064419081533 7$$

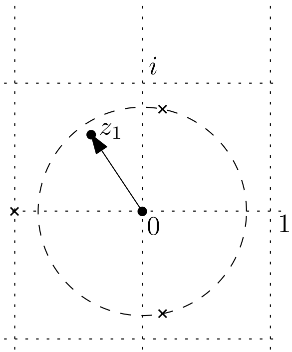
$$\begin{aligned}&\arctan \frac{3(1+i)}{5} \simeq 0{,}670782196758950644190815337\\&470563257136926554756272168200911977536 3456\\&278854626820664854718211213420894746035558 0\\&143307978759229996452908179322122783645849 6\\&724102775181665868102824270978608780423120 3\\&505958865743613754272861107591933409173585 5\\&+ 0{,}431377520921713598259655353968305991524 8\\&712250278476370441633366245813271490467784 6\\&918866484859235137119330807715725002764698 8\\&528175237871417128345669868633713357054594 5\\&874682143081235188452209834340332793714853 6\\&33889014286417108050032 1\ i\end{aligned}$$



Fonctions holonomes générales

$$(z+1)(3z^2-z+2)\,y''' + (5z^3+4z^2+2z+4)y'' \\ +(z+1)(4z^2+z+2)y' + (4z^3+2z^2+5)y = 0$$

$$y(0)=0, y'(0)=i, y''(0)=0$$



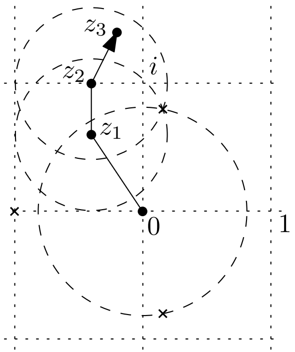
$y(z_1) \simeq -$ 0,568822071389210996823288748953940401816728372266594043883320346219592758123204947970582011367071207284881747532964017961864023316533535391382122817674206638746845195076195216482627052648481989147
$-$ 0,419511208258882168146744950055683226360489036947539095815956057715158016902158469436992399704818660023662419290957376458107304167758338477695883926482332635602621803666345475377169256904611372563 1 i

$$z_1 = \frac{-2+3i}{5}$$

Prolongement analytique numérique

$$(z+1)(3z^2 - z + 2)\,y''' + (5z^3 + 4z^2 + 2z + 4)y'' \\ +(z+1)(4z^2 + z + 2)y' + (4z^3 + 2z^2 + 5)y = 0$$

$$y(0) = 0, y'(0) = i, y''(0) = 0$$



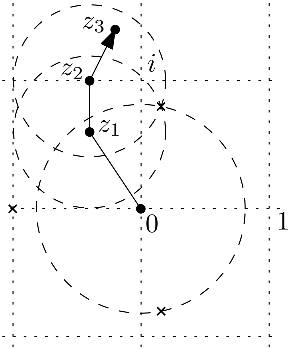
$y(z_3) \simeq -1{,}5598481440603221187326507993405$
93389341334664487959500453706337545990130
23595723610120655516690697098992400952293
02516117147544713452845642644966476254288
76662237635657163415131886063430803161039
$-$ 0.71077649435126718436732868786933143977
59047479618104045777076954591551406949345
14336874295533356649869509377592841606239
84373919434109735084282549387411069877437
70372320294299156084733705293726504 i

$$z_3 = \frac{-1+7i}{5}$$

Prolongement analytique : connexion entre points réguliers

$$(z+1)(3z^2-z+2)\,y''' + (5z^3+4z^2+2z+4)y'' \\ +(z+1)(4z^2+z+2)y' + (4z^3+2z^2+5)y = 0$$

$$\begin{bmatrix} y(z_3) \\ y'(z_3) \\ y''(z_3) \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} \quad \end{bmatrix}}_{\begin{bmatrix} 1{,}229919181 + 1{,}222484838i & -0{,}710776494 + 1{,}559848144i & -1{,}680450593 + 0{,}8612944465i \\ 2{,}192415163 - 0{,}982260350i & 1{,}428307159 + 1{,}237636972i & 1{,}683681888 + 1{,}443224767i \\ -0{,}810105380 - 0{,}813018670i & 0{,}949416034 - 0{,}368995278i & -0{,}309094585 - 0{,}032241130i \end{bmatrix}} \begin{bmatrix} y(0) \\ y'(0) \\ y''(0) \end{bmatrix}$$



$$z_3 = \frac{-1+7i}{5}$$

Points de grande taille

Évaluation par *bit burst*

$$
\begin{aligned}
\operatorname{erf}(\pi) \simeq{}& 0.99999112385363235839473162078120294471238208 15\\
&1287659904758639164678439426196498460278504541782613310\\
&0604326482152030660441196387585407489394338729142916313\\
&2555230902334047429212609807578643285046857228864728035\\
&3074866062036004350772927038034048195719630178507694248\\
&4951063443190106356178078634699387973616755577593078576\\
&7867193730580658008654893571733600902958925087790354763\\
&1634821321290934135517729080384812555377261445353232562\\
&6651433607961144658060331385205962860463925296434774976\\
&4667106060908609383010103929356543447438130957966770981\\
&9560099884058213492947592606412648383713291083934904913\\
&3976893748259243076371780227275937091363807381587573107
\end{aligned}
$$

(Implémentation des bornes incomplète dans ce cas)

Évaluation par *bit burst*

Quelques mots sur l'algorithme

Coût du scindage binaire : $O\left(\mathsf{M}\left(\frac{n\,(\ell+\log n)}{\log(\rho/|\delta z|)}\log n\right)\right)$

Prolongement analytique le long du chemin

$$
\begin{aligned}
z_0 = 0 \to z_1 &= 0{,}a_1 \\
\to z_2 &= 0{,}a_1a_2a_3 \\
\to z_3 &= 0{,}a_1a_2a_3a_4a_5a_6a_7 \\
\to z_4 &= 0{,}a_1a_2a_3a_4a_5a_6a_7a_8a_9a_{10}a_{11}a_{12}a_{13}a_{14}a_{15} \\
\to \cdots \to z &= 0{,}a_1a_2\ldots a_n
\end{aligned}
$$

$$|z_{j+1} - z_j| \leqslant 2^{2^{-j}}$$

Complexité $\quad O\left(\sum_{j=0}^{O(\log n)} \mathsf{M}\left(\frac{n\,(2^j+\log n)}{2^j}\log n\right)\right) = O(M(n\log^2 n))$

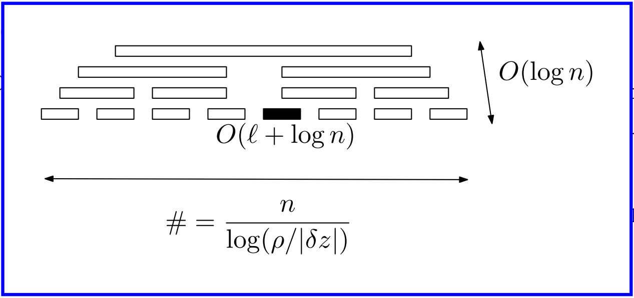
Évaluation par *bit burst*

Quelques mots sur l'algorithme

Coût du scindage binaire : $O\Big(\mathrm{M}\Big(\dfrac{n\,(\ell+\log n)}{\log(\rho/|\delta z|)}\log n\Big)\Big)$

Prolong

z_0



$-j$

15

Complexité $O\Big(\displaystyle\sum_{j=0}^{O(\log n)} \mathrm{M}\Big(\frac{n\,(2^j+\log n)}{2^j}\log n\Big)\Big) = O(M(n\log^2 n))$

Évaluation par *bit burst*

Quelques mots sur l'algorithme

Coût du scindage binaire : $O\left(\mathrm{M}\left(\frac{n\ (\ell + \log n)}{\log(\rho/|\delta z|)} \log n\right)\right)$

Prolongement analytique le long du chemin

$$
\begin{aligned}
z_0 = 0 &\to z_1 = 0{,}a_1 \\
&\to z_2 = 0{,}a_1 a_2 a_3 \\
&\to z_3 = 0{,}a_1 a_2 a_3 a_4 a_5 a_6 a_7 \\
&\to z_4 = 0{,}a_1 a_2 a_3 a_4 a_5 a_6 a_7 a_8 a_9 a_{10} a_{11} a_{12} a_{13} a_{14} a_{15} \\
&\to \cdots \to z = 0{,}a_1 a_2 \ldots a_n
\end{aligned}
$$

$$|z_{j+1} - z_j| \leqslant 2^{2^{-j}}$$

Complexité $O\left(\sum_{j=0}^{O(\log n)} \mathrm{M}\left(\frac{n\ (2^j + \log n)}{2^j} \log n\right)\right) = O(M(n \log^2 n))$

Résumé

1. Bornes respectant l'ordre de croissance exponentiel pour les suites holonomes / Séries majorantes respectant le rayon de convergence pour leurs séries génératrices
2. Code pour le prolongement analytique numérique garanti à grande précision

Problèmes connexes

- bornes plus fines, plus générales
- interaction avec d'autres procédés, encadrements
- développements en séries de polygones orhogonaux ?
- implémentation *vraiment* efficace du scindage binaire
- facteur constant, dépendance en la fonction...

Résumé

1. Bornes respectant l'ordre de croissance exponentiel pour les suites holonomes / Séries majorantes respectant le rayon de convergence pour leurs séries génératrices
2. Code pour le prolongement analytique numérique garanti à grande précision

Problèmes connexes

- bornes plus fines, plus générales
- interaction avec d'autres procédés, encadrements
- développements en séries de polygones orhogonaux ?
- implémentation *vraiment* efficace du scindage binaire
- facteur constant, dépendance en la fonction...

Merci !