Calcul de facteurs d'ordre 1 d'opérateurs différentiels (et de récurrence ?) par évaluation numérique

Marc Mezzarobba

CNRS, équipe Pequan, LIP6, UPMC

Séminaire « Calcul et preuves », Palaiseau, 1er décembre 2014

Des équations linéaires

Différentielles :

$$a_d(z)\,y^{(d)}(z)+\cdots+a_1(z)\,y'(z)+a_0(z)\,y(z)=0 \qquad a_i\in\mathbb{K}[z]$$

Aux différences :

$$b_d(z)\,u(z+d)+\cdots+b_1(z)\,u(z+1)+b_d(z)\,u(z)=0 \qquad b_i\in\mathbb{K}[z]$$

$$\mathbb{K}=\bar{\mathbb{K}}\subseteq\mathbb{C}$$

On cherche des solutions en forme close.

Des opérateurs

Différentiels :

$$\underbrace{\left(a_d(z)\,D^d + \cdots + a_1(z)\,D + a_0(z)\right)}_{\in \mathbb{K}(z)\langle D\rangle} \cdot y(z) = 0 \qquad\qquad a_i \in \mathbb{K}[z]$$

Aux différences :

$$\underbrace{\left(b_d(z)\,S^d + \cdots + b_1(z)\,S + b_d(z)\right)}_{\in \mathbb{K}(z)\langle S\rangle} \cdot u(z) = 0 \qquad\qquad b_i \in \mathbb{K}[z]$$

Éléments d'anneaux de polynômes tordus.

On cherche des facteurs droits.

Facteurs droits d'ordre un

Fonctions hyperexponentielles

$$L \cdot y = L' \underbrace{(D - r) \cdot y}_{=0} = 0$$

$$\frac{y'(z)}{y(z)} = r(z) \in \mathbb{K}(z)$$

$$\begin{aligned} y(z) &= C \exp \int^z r \\ &= \mathrm{rat}_1(z)^{\alpha_1} \cdots \mathrm{rat}_k(z)^{\alpha_k}\, e^{\mathrm{rat}(z)} \end{aligned}$$

Ex. : $\dfrac{z+1}{z-1}\,\dfrac{(z-2)^{\sqrt{2}}}{\sqrt{2\,z-3}}\exp\dfrac{\sqrt{5}}{z}$

Termes hypergéométriques

$$L \cdot u = L' \underbrace{(S - r) \cdot u}_{=0} = 0$$

$$\frac{u(z+1)}{u(z)} = r(z) \in \mathbb{K}(z)$$

$$\begin{aligned} u(z) &= C \prod^z r \\ &= C\, a^z\, \frac{\Gamma(z-\alpha_1) \cdots \Gamma(z-\alpha_i)}{\Gamma(z-\beta_1) \cdots \Gamma(z-\beta_j)} \end{aligned}$$

Ex. : $\dfrac{\left(1+\sqrt{5}\right)^z \Gamma(z)}{(z+1)^2\, \Gamma\!\left(z-\sqrt{3}\right)}$

Solutions polynomiales et rationnelles

$$L \cdot f = 0 \qquad \text{où} \qquad f(z) = \frac{p(z)}{q(z)} \in \mathbb{K}(z)$$

$\dfrac{f'(z)}{f(z)} \in \mathbb{K}(z)$	$\dfrac{f(z+1)}{f(z)} \in \mathbb{K}(z)$

1. Borne sur le dénominateur : $q(z) \mid Q(z)$
2. Changement de fonction inconnue :
   $L' \cdot g = 0$ où $g(z) = Q(z)\, f(z) \in \mathbb{K}[z]$
3. Borne sur le degré : $\deg g \leqslant D$
4. Coefficients indéterminés : $L' \cdot (g_d\, z^d + \cdots + g_0) = 0$

Solutions hyperexponentielles

Solutions hyperexponentielles

$L \cdot y = 0$ où $\dfrac{y'(z)}{y(z)} \in \mathbb{K}(z)$

$y(z) = \mathrm{rat}(z)\,\mathrm{hyperexp}(z)$

Exemple :

$$\underbrace{\frac{z+\sqrt{7}}{(z-1)^2}}_{\in\mathbb{K}(z)}\underbrace{(z-1)^{\sqrt{2}}\exp\left(\frac{1}{z}\right)}_{\text{hyperexp.}}$$

Solutions hypergéométriques

$L \cdot u = 0$ où $\dfrac{u(z+1)}{u(z)} \in \mathbb{K}(z)$

$u(z) = \mathrm{rat}(z)\,\mathrm{hypergeom}(z)$

Exemple :

$$\underbrace{\frac{(z-3)}{\left(z+\sqrt{2}\right)(z-1)}}_{\in\mathbb{K}(z)}\underbrace{\frac{\Gamma\left(z-\sqrt{2}\right)^3}{\Gamma(z)\,\Gamma(z-6)}}_{\text{hypergéom.}}$$

Stratégie :
1. Déterminer « la » **partie singulière**
2. Changer de fonction inconnue : $L' \cdot \mathrm{rat}(z) = 0$
3. Chercher des solutions rationnelles

Parties singulières

$$\frac{z+\sqrt{7}}{(z-1)^2}\underbrace{(z-1)^{\sqrt{2}}\exp\left(\frac{1}{z}\right)}_{\text{« partie singulière »}}$$

Note : $\dfrac{(z-1)^{\sqrt{2}}}{(z-1)^2}=(z-1)^{\sqrt{2}-2}$

$$\frac{(z-3)}{\left(z+\sqrt{2}\right)(z-1)}\underbrace{\frac{\Gamma\left(z-\sqrt{2}\right)^3}{\Gamma(z)\,\Gamma(z-6)}}_{\text{« partie sing. »}}$$

Note : $\Gamma(z-6)=\mathrm{rat}(z)\,\Gamma(z)$

- Relation d'équivalence : $h_1 \sim h_2$ ssi $\dfrac{h_1}{h_2}\in\mathbb{K}(z)$
- Parties singulières = classes d'équivalence
- Les classes d'équivalence sont des espaces vectoriels

  (Mais h_1+h_2 avec $h_1 \nsim h_2$ n'est pas hyperexponentielle/hypergéométrique !)
- Résoudre se ramène à **trouver les parties singulières**

Opérateurs différentiels

Solutions hyperexponentielles

Avec Fredrik Johansson et Manuel Kauers

Historique

Beke 1894	Premier algorithme (?), stratégie de recombinaison
van Hoeij 1997	Reconstruction de facteurs globaux par approximation de Padé, contrôle des extensions
Cluzeau & van Hoeij 2004	Recombinaison mod p, contrôle des extensions

Autres approches & questions apparentées

Bronstein 1992, **van Hoeij 1997(a)**, **Singer 1996**, **Pflügel 1997**, **van der Hoeven 2007**…

Développements locaux

$$\frac{h'}{h} \in \mathbb{K}(z)$$

Décomposition en éléments simples :

$$h(z) = \exp\left(\int \left(\frac{e_1(z-z_1)}{(z-\boldsymbol{z_1})^{m_1}} + \frac{e_2(z-z_2)}{(z-\boldsymbol{z_2})^{m_2}} + \cdots \right) \right)$$

En $z \notin \{z_i\}$: $\quad h(z+\zeta) = (c_0 + c_1\,\zeta + \cdots),$

En z_i : $\quad h(z_i+\zeta) = \exp\left(\int \frac{e_i(\zeta)}{\zeta^k} \right) (c_0 + c_1\,\zeta + \cdots)$

$$= \zeta^{\alpha}\, e^{\beta_1 \zeta^{-1} + \cdots + \beta_k \zeta^{-k}}\, (c_0 + c_1\,\zeta + \cdots)$$

Note

$$h_1 \sim h_2 \quad \Rightarrow \quad \frac{h_1(z_i+\zeta)}{h_2(z_i+\zeta)} \in \mathbb{K}((\zeta))$$

Si $L \cdot h = 0$, les z_i doivent être parmi les **singularités** de L ($\in \mathbb{C} \cup \{\infty\}$)

Solutions locales

L'opérateur L admet une base de **solutions formelles** de la forme

$$y_i(w^{\boldsymbol{s}}) = w^{\overbrace{\boldsymbol{\alpha}}^{\in\mathbb{K}}} \exp(\underbrace{\boldsymbol{u}(w)}_{\in w^{-1}\mathbb{K}[w^{-1}]}) \sum_{k=0}^{\boldsymbol{m}} \log(w)^k \underbrace{\boldsymbol{b_k}(w)}_{\in\mathbb{K}[[w]]}.$$

(Autres points : $\zeta = z - z_i$ ou $\zeta = 1/z$)

Exemple : $z^{\sqrt{5}}\, e^{z^{-2/3}+iz^{-1/3}} \left(\left(1 + z^{1/2} + 2\,z + \cdots\right) \log z + (z + 3\,z + \cdots) \right)$

Partie exponentielle locale : $z^{\alpha+\mathbb{Z}} \exp\!\left(u(z^{-1/s})\right)$

$h(z) = z^{\alpha}\, e^{\mathrm{pol}(1/z)}\, (c_0 + c_1\, z + \cdots)$ $\quad \begin{cases} \text{pas de ramification } (s=1) \\ \text{pas de logs } (m=0) \\ \text{dév. convergent } (c(z) \in \mathbb{K}\{\{z\}\}) \end{cases}$

Recombinaison

$z_1 = 0$	$\boldsymbol{e^{1/z}} \cdot (1 - \frac{4}{9} z + \cdots)$	$\boldsymbol{\sqrt{x}} \cdot \begin{matrix}(1 - x + \cdots)\\(x^2 - \frac{7}{4} z + \cdots)\end{matrix}$	$\cdots$
$z_2 = 1$	$\boldsymbol{e^{1/(z-1)}} \cdot \begin{matrix}(1 + \frac{1}{2}(z-1) + \cdots)\\((z-1)^2 + \cdots)\end{matrix}$	$\mathbf{1} \cdot ((z-1)^3 + \cdots)$	$\cdots$
$z_3 = 2$	$\mathbf{1} \cdot (1 - \frac{3}{4}(z-2) + \cdots)$	$\boldsymbol{e^{1/(z-2)}} \cdot \begin{matrix}((z-2)^{-2} + \cdots)\\((z-2) + \cdots)\end{matrix}$	$\cdots$
$z_4 = \infty$	$\mathbf{1} \cdot (z + 3 + 9 z^{-1} + \cdots)$	$\boldsymbol{\sqrt{x}} \cdot \begin{matrix}(1 + z^{-1} + \cdots)\\(z^3 + z + \cdots)\end{matrix}$	$\cdots$

$$h(z) = \frac{(z-1)^3}{(z-2)^2} \exp\left(\frac{2z - 2}{z(z-2)}\right)$$

Jusqu'à $\boldsymbol{d^n}$ combinaisons (n singularités, ordre d)

...mais au plus $\boldsymbol{d}$ solutions !

Algorithme « de Beke »

Entrée : $L \in \mathbb{K}[z]\langle D \rangle$

Sortie : un paramétrage des solutions hyperexponentielles

1. En chaque singularité z_i,
   déterminer toutes les parties exponentielles locales $E_{i,j}$ possibles
2. Pour chaque combinaison $(j_1, \ldots, j_n)$,
   changer de fonction inconnue ($y = E_{1,j_1} \cdots E_{n,j_n} f$)
   et déterminer l'espace $R_{(j_1,\ldots,j_n)}$ des solutions rationnelles
3. Renvoyer $\{E_{1,j_1} \cdots E_{n,j_n} \cdot R_{(j_1,\ldots,j_n)}\}_{(j_1,\ldots,j_n)}$

Limitations

- combinatoire de la recombinaison
- nombres algébriques

Historique

Beke 1894	Premier algorithme (?), stratégie de recombinaison
van Hoeij 1997	Reconstruction de facteurs globaux par approximation de Padé, contrôle des extensions
Cluzeau & van Hoeij 2004	Recombinaison mod p, contrôle des extensions

Autres approches & questions apparentées

Bronstein 1992, **van Hoeij 1997(a)**, **Singer 1996**,
Pflügel 1997, **van der Hoeven 2007**...

Recombinaison

$z_1 = 0$	$\boldsymbol{e^{1/z}} \cdot (1 - \frac{4}{9} z + \cdots)$	$\boldsymbol{\sqrt{x}} \cdot \begin{matrix}(1 - x + \cdots) \\ (x^2 - \frac{7}{4} z + \cdots)\end{matrix}$	$\cdots$
$z_2 = 1$	$\boldsymbol{e^{1/(z-1)}} \cdot \begin{matrix}(1 + \frac{1}{2}(z-1) + \cdots) \\ ((z-1)^2 + \cdots)\end{matrix}$	$\mathbf{1} \cdot ((z-1)^3 + \cdots)$	$\cdots$
$z_3 = 2$	$\mathbf{1} \cdot (1 - \frac{3}{4}(z-2) + \cdots)$	$\boldsymbol{e^{1/(z-2)}} \cdot \begin{matrix}((z-2)^{-2} + \cdots) \\ ((z-2) + \cdots)\end{matrix}$	$\cdots$
$z_4 = \infty$	$\mathbf{1} \cdot (z + 3 + 9 z^{-1} + \cdots)$	$\boldsymbol{\sqrt{x}} \cdot \begin{matrix}(1 + z^{-1} + \cdots) \\ (z^3 + z + \cdots)\end{matrix}$	$\cdots$

$$h(z) = \frac{(z-1)^3}{(z-2)^2} \exp\left(\frac{2z-2}{z(z-2)}\right)$$

Jusqu'à $\boldsymbol{d^n}$ combinaisons (n singularités, ordre d)

…mais au plus $\boldsymbol{d}$ solutions !

Recombinaison par algèbre linéaire

$W_{i,j}$ = solutions **globales** de partie exponentielle locale $E_{i,j}$ en z_i

$$\begin{array}{ccccccccc} W_{1,1} & \oplus & W_{1,2} & \oplus & \cdots & \oplus & W_{1,d} & = & W \\ W_{2,1} & \oplus & W_{2,2} & \oplus & \cdots & \oplus & W_{2,d} & = & W \\ \vdots & & \vdots & & & & \vdots & & \vdots \\ W_{n,1} & \oplus & W_{n,2} & \oplus & \cdots & \oplus & W_{n,d} & = & W \end{array}$$

Problème

Trouver les $(j_1, \dots, j_n)$ t.q. $W_{1,j_1} \cap \cdots \cap W_{n,j_n} \neq \{0\}$

Au plus d couples (j_1, j_2) t.q. $W_{(j_1,j_2)} := W_{1,j_1} \cap W_{2,j_2} \neq \{0\}$
Au plus d triplets (j_1, j_2, j_3) t.q. $W_{(j_1,j_2,j_3)} := W_{(j_1,j_2)} \cap W_{3,j_3} \neq \{0\}$
$\vdots$
Au plus d n-uplets $(j_1, \dots, j_n)$ t.q. $W_{(j_1,\dots,j_n)} := W_{(j_1,\dots,j_{n-1})} \cap W_{n,j_n} \neq \{0\}$

Calcul incrémental des $W_{(j_1,\dots,j_k)}$: $\boldsymbol{O(n\, r^4)}$ opérations arithmétiques

Solutions locales et solutions globales

Solutions locales $\qquad\qquad$ Solutions globales

$$V_i = \bigoplus_j V_{i,j} \quad \xrightarrow{?} \quad W = \bigoplus_j W_{i,j}$$

$V_{i,j}$ = solutions formelles en z_i de partie singulière E_i

Recombinaison : on voudrait « calculer » $V_{i,j} \cap V_{i',j'}$ avec $i \neq i'$

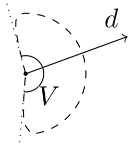
→ définir $\pi_i : V_i \to W$ tel que $\pi_i^{-1}(h)$ contienne le développement de h et que la somme $\bigoplus_j \pi_i(V_{i,j})$ soit directe

Pour cela : interpréter les solutions locales comme des fonctions analytiques

Resommation effective

Opérateur de (multi)sommation $\mathcal{S}_{\vec{k},\vec{d}}:\mathbb{C}\{z\}_{\vec{k},\vec{d}}\to\mathcal{A}(V)$

(morphisme d'algèbres différentielles)



Séries dans sol. locales $\in\mathbb{C}\{z\}_{\vec{k},\vec{d}}$ pour $\vec{k},\vec{d}$ convenables

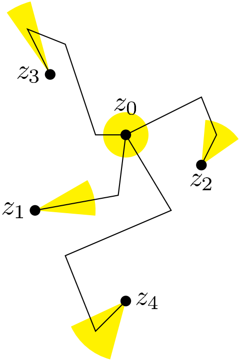
Théorème [van der Hoeven, 2007]

Pour $\hat{y}$ solution formelle de $L\cdot\hat{y}=0$, on sait calculer $\vec{k},\vec{d}$ et $\zeta\in\mathbb{C}$ puis, étant donné $\varepsilon>0$, on sait calculer a tel que

$$|\mathcal{S}_{\vec{k},\vec{d}}\cdot\hat{y}(\zeta)-a|\leqslant\varepsilon.$$

Pour $\hat{y}$ convergente, $\mathcal{S}_{\vec{k},\vec{d}}\cdot\hat{y}$ ne dépend pas de $\left(\vec{k},\vec{d}\right)$, et coïncide avec la somme usuelle.

Prolongement analytique numérique



- Point (ordinaire) de référence $z_0 \in \mathbb{C}$

- Solutions globales $(\in W)$ représentées par des **approximations numériques** $\in \mathbb{Q}(i)^d$

$$Y_\varepsilon(z_0) \approx \begin{bmatrix} y(z_0) \\ \vdots \\ y^{(d-1)}(z_0) \end{bmatrix}$$

- Calcul de $Y_\varepsilon(z_0)$: resommation effective + prolongement analytique numérique

- Pour une solution hyperexp., le choix de $(\vec{k}, \vec{d})$ et des déterminations du log est sans influence

Test numérique d'intersection

$$\begin{array}{ccccccccc} W_{1,1} & \oplus & W_{1,2} & \oplus & \cdots & \oplus & W_{1,d} & = & W \\ W_{2,1} & \oplus & W_{2,2} & \oplus & \cdots & \oplus & W_{2,d} & = & W \\ \vdots & & \vdots & & & & \vdots & & \vdots \\ W_{n,1} & \oplus & W_{n,2} & \oplus & \cdots & \oplus & W_{n,d} & = & W \end{array}$$

Décider si $\boldsymbol{(W_{(j_1,\ldots,j_k)}) \cap W_{k+1,j_{k+1}} = \{0\}}$ revient à tester si une certaine matrice est de rang maximal.

- **Algèbre linéaire par intervalles**

  (rang calculé) $\leqslant$ (rang exact),

  (rang calculé) $=$ (rang exact) si la précision de calcul est suffisante

- On élimine les $(j_1, \ldots, j_{k+1})$ pour lesquels l'intersection est nulle

  Les combinaisons restantes ne satisfont pas forcément $W_{(j_1,\ldots,j_{k+1})} \neq \{0\}$

Algorithme

1. Pour chaque singularité z_i
   a. Calculer les parties singulières $E_{i,j}$
   et les espaces $V_{i,j}$ de solutions locales correspondantes
   b. Pour chaque j, calculer une base (approchée) de $W_{i,j} = \pi_i(V_{i,j})$
   par resommation + prolongement analytique
   On peut tout de suite envoyer les log et $z^{1/s}$ sur zéro.
2. Calculer incrémentalement les intersections $W_{1,j_1} \cap \cdots \cap W_{k,j_k}$
   en algèbre linéaire d'intervalles
   Augmenter la précision s'il y a plus de $\sim d$ intersections non nulles à une étape
3. Pour chaque $W_{(j_1,\ldots,j_n)} \neq 0$ restant,
   chercher des solutions rationnelles

Algorithme

Coût

- #combinaisons polynomial
- coût recombinaison polynomial
- **précision nécessaire** ?

Note : on ne *reconstruit* pas les solutions exactes !

Note : pas d'algébriques dans la recombinaison

Question

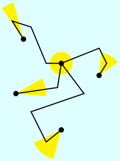
Les développements locaux de solutions hyperexponentielles ne sont jamais divergents !

→ « Isoler » les **solutions convergentes** en un point sing. irrég. ?

Résumé

$$z^\alpha \; e^{u(z^{-1/s})} \sum_{k=0}^{m} \log(z)^k \, b_k(z^{1/s})$$

Bases de solutions formelles locales



Prolongement analytique

$$\begin{array}{ccccccccc}
W_{1,1} & \oplus & W_{1,2} & \oplus & \cdots & \oplus & W_{1,d} & = & W \\
W_{2,1} & \oplus & W_{2,2} & \oplus & \cdots & \oplus & W_{2,d} & = & W \\
\vdots & & \vdots & & & & \vdots & & \vdots \\
W_{n,1} & \oplus & W_{n,2} & \oplus & \cdots & \oplus & W_{n,d} & = & W
\end{array}$$

Recombinaison par algèbre linéaire

?

Précision nécessaire ($\to$ complexité) ?

Contourner la resommation ?

Opérateurs aux différences

Solutions hypergéométriques

Travail **en cours** avec Manuel Kauers

Singularités finies

[van Hoeij 1999]

$$L = a_d(z)\, D^d + \cdots \in \mathbb{K}[z]\langle D \rangle$$

Singularités finies :

$\{z : a_d(z) = 0\}$

$\supset \{$sing. des solutions$\}$

Partie exp. de h en z_i

$\approx$ facteur en $e^{\frac{1}{z-z_i}}$

Parties exp. des sol. locales de L

$\rightarrow$ parties exp. possibles des sol.

$$L = b_d(z)\, S^d + \cdots + b_0(z) \in \mathbb{K}[z]\langle S \rangle$$

Singularités finies :

$\{\boldsymbol{q + \mathbb{Z}} : b_d(q)\, b_0(q) = 0\}$

$\bigcup\, (q + \mathbb{Z}) \supset \{$sing. des sol.$\}$

Croissance de valuation en q_i

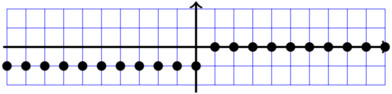
$\approx$ facteur en $\Gamma(z - q_i)$

Bornes sur la croissance de val. en q_i

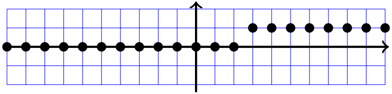
$\rightarrow$ croissances de val. possibles

Croissance de valuation

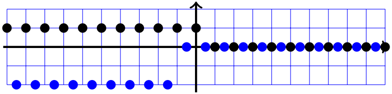
Pour une fonction hypergéométrique :



$\Gamma(z)$ $\quad \mathrm{vg}_{\mathbb{Z}} = 1$



$\sin(2\,\pi\,z)\,\Gamma(z-2)$ $\quad \mathrm{vg}_{\mathbb{Z}} = 1$



$$\frac{\Gamma(z+\frac{1}{2})^2}{\Gamma(z)}$$

$\mathrm{vg}_{\mathbb{Z}} = -1$

$\mathrm{vg}_{\frac{1}{2}+\mathbb{Z}} = 2$

$\mathrm{vg}_q(h)$ ne dépend que de la partie singulière de h

Pour un opérateur : bornes via une base de solutions $q+\mathbb{Z} \to \mathbb{K}((\varepsilon))$

Solutions hypergéométriques

Algorithme [van Hoeij 1999]

1. Calculer les croissances de valuation possibles aux singularités finies

   (et à l'infini)

2. Élimier certaines combinaisons grâce à des « relations de Fuchs »

   et des calculs modulo p [Cluzeau & van Hoeij 2006]

3. Pour chaque combinaison restante, changer de fonction inconnue, chercher des solutions rationnelles

Mêmes limitations que dans le cas différentiel :

- combinatoire des comportements locaux
- extensions de corps

Question

Étendre au cas aux différences la méthode de recombinaison par algèbre linéaire numérique (sur les fonctions 1-périodiques...)

- base de **solutions locales** de croissance de valuation donnée en une singularité finie ?

- détermination de **solutions méromorphes** correspondantes et « prolongement analytique » numérique rigoureux ?